ضبط الأرصاد المساحية

Adjustment of Surveying Observations

يهتم هذا الباب بدراسة الأخطاء Errors التي تتعرض لها الأرصاد المساحية Surveying observations وتأثيرها على جودة هذه الأرصاد وكذلك كيفية انتقالها إلى الكميات المحسوبة Estimated Quantities وكيفية تجنبها ومعالجتها.

1. الأخطاء في الأرصاد المساحية Errors in Surveying Observations

تتنوع الأخطاء التي تتعرض لها الأرصاد المساحية طبقا لنوعية العمل المساحي وطبيعته حيث تتعدد طرق المسح فهناك المسح الأرضي Terrestrial Surveying و المسح التصويري Photogrammetric Surveying و المسح بنظام تحديد المواقع العالمي GPS Surveying وتشترك العوامل الطبيعية المحيطة و الأجهزة المستخدمة و الراصدون في كونهم مصادر منتجة لهذه الأخطاء لذا تنقسم الأخطاء طبقا لمصادرها إلى الأقسام الثلاث الآتية:

- أخطاء طبيعية Natural Errors وترجع إلى التغير في درجات الحرارة Temperature و الرطوبة Humidity و الضغط الجوي Atmospheric Pressure و الانكسار الجوي Atmospheric Refraction و الجاذبية الأرضية Gravity.
- أخطاء أجهزة Instrumental Errors وتنتج من الصناعة المعيبة أو الضبط الغير تام للأجهزة المستخدمة في عملية الرصد أو الحركة في بعض أجزائها.
- أخطاء شخصية Personal Errors وتظهر بسبب محدودية الحواس البشرية المستخدمة في انجاز الخطوات الضرورية المتبعة قبل و أثناء الرصد.

يمكن تصنيف الأخطاء في الأرصاد المساحية تبعا لطبيعتها إلى أخطاء جسيمة Gross Errors و أخطاء منتظمة Systematic Errors و أخطاء عشوائية Random Errors.

2. الأخطاء الجسيمة Gross Errors

الأخطاء الجسيمة أو الأغلاط هي أخطاء تنتج عن قلة عناية الراصد أثناء عملية الرصد. أمثلة لهذا النوع من الأخطاء : الرصد الخاطئ للأهداف أي لا يتم رصد الهدف المطلوب - الرصد الخاطئ للقراءات بإغفال جزء من القراءة (مثل رصد القراءة 0.95 بدلا من القراءة الصحيحة 1.95 في أعمال الميزانية) أو تسجيلها بصورة خاطئة (مثل تسجيل القراءة 2.19 بدلا من القراءة الصحيحة 2.91). وللتغلب على هذه الأخطاء يجب أن يقوم الراصد بعمل الاحتياطات والمراجعات اللازمة أثناء الرصد مثل رصد

قراءاتي الشعرتين العليا والسفلى - بالإضافة إلى رصد قراءة الشعرة الوسطى - و حساب متوسطهما ومقارنته بقراءة الشعرة الوسطى وذلك في أعمال الميزانية. كذلك تكرار الرصد يمكن أن يظهر التناقض بين الأرصاد و من ثم يساعد في اكتشاف هذا النوع من الأخطاء. توجد أيضا بعض الأساليب التي تستخدم الاختبارات الإحصائية Statistical Tests لاكتشاف الأغلاط و استبعادها وذلك خلال عملية حساب المتغيرات المطلوبة Estimation Process من الأرصاد التي تم جمعها.

3. الأخطاء المنتظمة Systematic Errors

الأخطاء المنتظمة تنتج من مصادر أخطاء معلومة مثل الأجهزة المستخدمة و الظروف الجوية المحيطة بعملية الرصد وهي أخطاء يمكن تصحيحها أو التخلص منها أو دمجها بالنماذج الرياضية ذات العلاقة. أمثلة لهذا النوع من الأخطاء : الأخطاء الناتجة عن تأثير الحرارة و الضغط الجوي على المسافات المقاسة الكترونيا و تأثير الانكسار الجوي وكروية الأرض على القراءات في أعمال الميزانية و الأخطاء الناتجة عن عيوب عدسة الكاميرا Camera Lens وعن تشوه المادة الفيلمية Film Material والانكسار الجوي على إحداثيات النقاط المقاسة على الصور في أعمال المسح التصويري كذلك أخطاء الغلاف الجوي Ionospheric and Tropospheric Errors على الأرصاد باستخدام نظام تحديد المواقع العالمي (GPS).

4. الأخطاء العشوائية Random Errors

الأخطاء العشوائية هي ما يتبقى أو ما يعلق بالأرصاد من أخطاء صغيرة - بعد أخذ الاحتياطات الكافية لتجنب الأغلاط واكتشافها وإزالتها إن وجدت وكذلك تصحيح الأرصاد للأخطاء المنتظمة - وهذه الأخطاء غير معلومة المصدر ولكنها تنشأ غالبا لأن عملية الرصد المساحي بما تشتمل عليه من تسامت و تسوية و توجيه هي عملية ليست كاملة تماما Imperfect Process حيث يتدخل فيها العنصر البشري منتجا بعض الأخطاء البسيطة كذلك فان النماذج الرياضية التي تستخدم لتصحيح الأخطاء المنتظمة تشتمل على بعض التقريب Approximation في بعض الأحيان مما يؤدي إلى بعض من هذه الأخطاء أيضا. تتبع الأخطاء العشوائية في سلوكها قوانين الاحتمالات Laws of Probability.

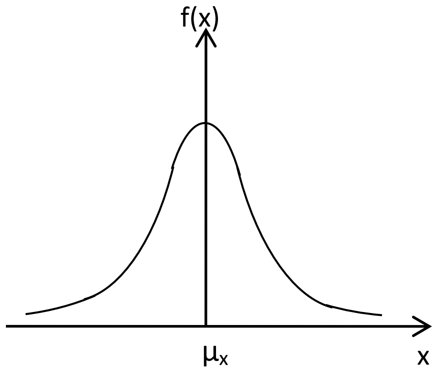
تتجمع هذه الأخطاء منتجة في النهاية أخطاء القفل في الميزانيات والمضلعات مما يستلزم معه إجراء عملية ضبط Adjustment لتوزيع هذه الأخطاء بحيث تحقق الأرصاد المضبوطة الاشتراطات الرياضية و الهندسية فيما بينها.

5. التوزيع الطبيعي Normal Distribution

إذا قمنا برصد مسافة أو زاوية ما عدد كبير من المرات بحيث لا تحتوي هذه الأرصاد على أغلاط أو أخطاء منتظمة وحاولنا التمثيل البياني للعلاقة Histogram بين القيم المرصودة (أو أخطائها الباقية) و

عدد مرات تكرار حدوثها فإننا نستطيع معرفة شكل توزيع هذه القيم (أو أخطائها الباقية) ويسمى المنحنى الناتج المضلع التكراري Frequency Polygon. بزيادة عدد الأرصاد بشكل كبير يؤول المضلع إلى منحنى متصل غير متعرج متماثل حول مركزه و له شكل الجرس Bell Shape . يطلق على هذا المنحنى منحنى التوزيع الطبيعي Normal Distribution Curve ويسميه الاحصائيون Normal Density Curve. تأخذ دالة التوزيع الطبيعي Normal Density Function الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\,\sigma_x^2}}$$



حيث:

μ_x : القيمة المتوسطة أو المتوقعة للمتغير x The mean or expected value of variable x

σ_x : الانحراف المعياري للمتغير x The standard deviation of variable x

وهذه الدالة متماثلة حول متوسطها μ_x كما أن قيمتها العظمى تقع عندما تكون قيمة المتغير x مساوية لقيمة μ_x. تتميز أيضا هذه الدالة بالخواص الآتية:

1- تؤول الدالة إلى الصفر عندما تقترب x من $\pm\infty$.

2- احتمال وقوع x في الفترة بين x_1 و x_2 يكافئ المساحة تحت المنحنى المحاطة بهاتين القيمتين والتي يمكن حسابها باستخدام التكامل العددي. قيم الاحتمالات للحيود عن القيمة المتوسطة (الخطأ) بقيم تبلغ σ_x و $2\sigma_x$ و $3\sigma_x$ تحسب كالآتي (أنظر الشكل التالي):

$$P(-\ \sigma_x <\ x -\ \mu_x < +\ \sigma_x) = P(\mu_x -\ \sigma_x < x < \mu_x +\ \sigma_x) = 0.6826$$

$$P(-2\sigma_x <\ x -\ \mu_x < +2\sigma_x) = P(\mu_x - 2\sigma_x < x < \mu_x + 2\sigma_x) = 0.9544$$

$$P(-3\sigma_x <\ x -\ \mu_x < +3\sigma_x) = P(\mu_x - 3\sigma_x < x < \mu_x + 3\sigma_x) = 0.9973$$

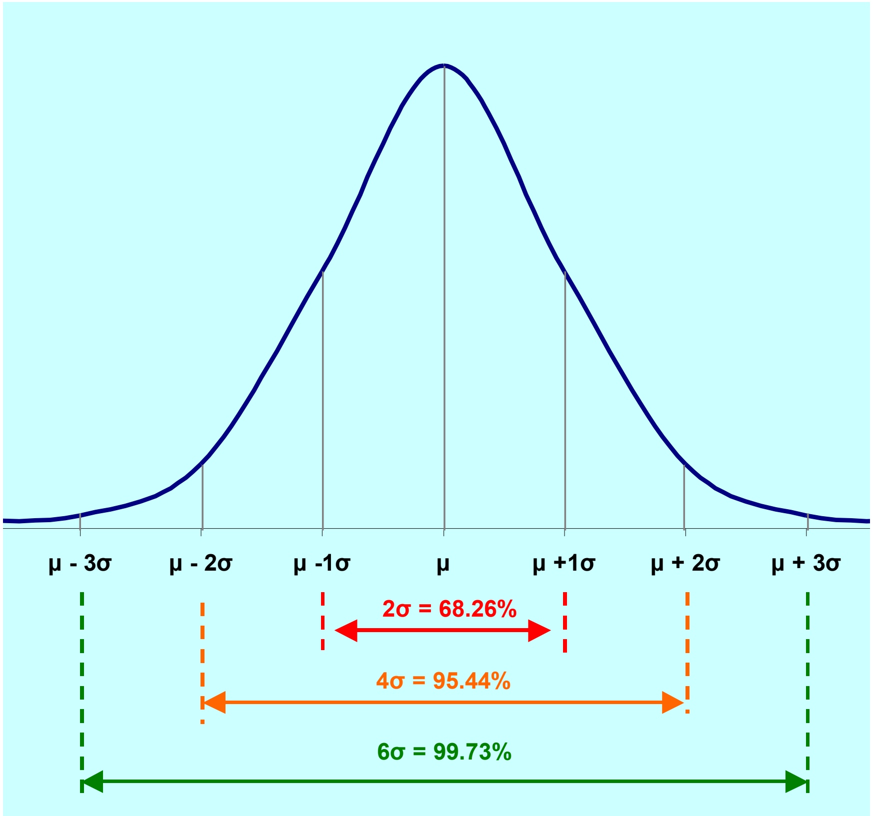
3- أحيانا نجد أنه من المفيد تثبيت قيم الاحتمال و إيجاد الفترة حول القيمة المتوسطة كدالة في الانحراف المعياري:

$$P(-1.645\sigma_x <\ x -\ \mu_x < +1.645\sigma_x) = 0.90$$

$$P(-1.960\sigma_x <\ x -\ \mu_x < +1.960\sigma_x) = 0.95$$

$$P(-2.576\sigma_x <\ x -\ \mu_x < +2.576\sigma_x) = 0.99$$

4- احتمال أن يأخذ المتغير x قيم أكبر من μ_x يكافئ احتمال أن يأخذ قيم أقل من μ_x. قيم هذا الاحتمال مساوية 0.5 (حيث أن المساحة الكلية تحت الدالة تساوي الواحد الصحيح).



مثال: إذا كان الانحراف المعياري للزوايا المقاسة بأحد أجهزة التيودوليت يبلغ ±5". احسب:

1. احتمال وجود خطأ في زاوية مقاسة بالجهاز يقع في المدى من -5" إلى +5".
2. احتمال وجود خطأ في زاوية مقاسة بالجهاز أكبر من +5".
3. احتمال وجود خطأ في زاوية مقاسة بالجهاز أكبر من +10".

الحل:

1. $P(-5'' < x - \mu_x < +5'') = P(-\sigma_x < x - \mu_x < +\sigma_x) = 0.6826$
2. $P(+5'' < x - \mu_x) = [1 - P(-\sigma_x < x - \mu_x < +\sigma_x)]/2 = 0.1587$
3. $P(+10'' < x - \mu_x) = [1 - P(-2\sigma_x < x - \mu_x < +2\sigma_x)]/2 = 0.0228$

6. القيمة الأكثر احتمالا Most Probable Value

عندما نكرر رصد أو قياس متغير مساحي ما (مثل مسافة أو زاوية) عدد من المرات فإننا نجد أن قيم الأرصاد الناتجة لا تنطبق غالبا بل تتغير و بشكل عشوائي وذلك نتيجة لما يسمى الأخطاء العشوائية. القيمة الحقيقية True Value لهذا المتغير هي في الواقع قيمة لا يمكننا الوصول إليها وتمثل القيمة الأكثر احتمالا Most Probable Value (أو القيمة المتوقعة Expected Value) أفضل بديل ممكن.
في حالة رصد متغير مساحي (L) عدد (n) من المرات بنفس الدقة بحيث تنتج الأرصاد $L_1, L_2, \dots, L_n$ فان القيمة الأكثر احتمالا والتي يمكن أن نرمز لها بالرمز $\bar{L}$ يمكن حسابها كالأتي:

$$\text{Most Probable value } (\bar{L}) = (L_1 + L_2 + \dots\dots + L_n) / n = \sum_{i=1}^{n} L_i / n$$

أما في حالة رصد المتغير المساحي (L) عدد (n) من المرات بدقات (أو أوزان) مختلفة فان القيمة الأكثر احتمالا تحسب كالأتي:

$$\text{Most Probable value } (\bar{L}) = (p_1 L_1 + p_2 L_2 + \dots\dots + p_n L_n) / (p_1 + p_2 + \dots\dots + p_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} L_i / \sum_{i=1}^{n} p_i$$

حيث p_i يمثل وزن الرصدة L_i وتتناسب قيمة وزن الرصدة تناسبا عكسيا مع مربع قيمة الانحراف المعياري لها علما بأن قيم الأوزان نسبية بينما قيم الانحراف المعياري تكون مطلقة.

7. الأخطاء الباقية Residuals

تمثل الأخطاء الباقية الفروق بين الأرصاد و القيمة الأكثر احتمالا لها ويرمز لها بالرمز (v) أي أن:

$$v_i = L_i - \bar{L} \;, \quad i = 1, \dots, n.$$

وهذه الأخطاء تأخذ إشارات موجبة و سالبة ومجموعها يساوي صفر.

8. الانحراف المعياري Standard Deviation

الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز σ هو احد معايير التشتت Dispersion Measures ولذا يستخدم في تقييم مدى إحكام الأرصاد Precision of Observations أي قربها من بعضها البعض أو قربها من متوسطها عند رصد متغير مساحي ما. تقل قيمة الانحراف المعياري بقرب الأرصاد من بعضها وتزيد قيمته بتباعدها عن بعضها. القيمة المربعة للانحراف المعياري تسمى التباين Variance.

في حالة رصد متغير مساحي (L) عدد (n) من المرات بنفس الدقة بحيث تنتج الأرصاد $L_1, L_2, \dots, L_n$ والأخطاء الباقية $v_1, v_2, \dots, v_n$ فان قيمة الانحراف المعياري المحسوبة لكل رصده من هذه

الأرصاد يعبر عنها بقيمة الانحراف المعياري المحسوبة لرصده وزنها الوحدة $\widehat{\sigma_o}$ والتي يمكن حسابها كالأتي:

$$\widehat{\sigma_o} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (L_i - \bar{L})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

حيث تحسب القيمة الأكثر احتمالا $\bar{L}$ كالأتي:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} L_i \,/\, n$$

أما عن قيمة الانحراف المعياري المحسوبة للقيمة الأكثر احتمالا و نرمز لها بالرمز $\widehat{\sigma_{\bar{L}}}$ فيمكن حسابها كالأتي:

$$\widehat{\sigma_{\bar{L}}} = \; = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\widehat{\sigma_o}}{\sqrt{n}}$$

في حالة رصد المتغير المساحي (L) عدد (n) من المرات بدقات (أو أوزان) مختلفة فان قيمة الانحراف المعياري المحسوبة لرصده وزنها الوحدة $\widehat{\sigma_o}$ تحسب كالأتي:

$$\widehat{\sigma_o} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (L_i - \bar{L})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-1}}$$

حيث تحسب القيمة الأكثر احتمالا $\bar{L}$ في هذه الحالة كالأتي:

$$\bar{L} = = \sum_{i=1}^{n} L_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} p_i$$

قيمة الانحراف المعياري المحسوبة لكل رصده L_i من هذه الأرصاد يعبر عنها كالأتي:

$$\widehat{\sigma_{L_i}} = \frac{\widehat{\sigma_o}}{\sqrt{p_i}}$$

أما عن قيمة الانحراف المعياري المحسوبة للقيمة الأكثر احتمالا في هذه الحالة فيمكن حسابها كالأتي:

$$\widehat{\sigma_{\bar{L}}} = \frac{\widehat{\sigma_o}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

9. انتقال الأخطاء العشوائية Propagation of Random Errors

بفرض وجود متغير y دالة في مجموعة من المتغيرات المستقلة x_1 و x_2 و ... و x_n معلوم الانحراف المعياري لكل منها

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

فانه يمكن حساب الانحراف المعياري للمتغيرy بتطبيق قانون انتقال الأخطاء Law of Error Propagation كالأتي:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

وبشكل عام إذا كانت Y مجموعة (أو متجه) من الكميات y_i وكل منها دالة في مجموعة (أو متجه) من المتغيرات العشوائية x_i فان:

$$Q_{YY} = J_{YX}\, Q_{XX}\, J_{YX}^T$$

حيث:

Q_{YY} : مصفوفة العوامل المساعدة للمتجه Y Cofactor matrix of Vector Y

Q_{XX} : مصفوفة العوامل المساعدة للمتجه X Cofactor matrix of Vector X

J : مصفوفة المشتقة الأولى Jacobian Matrix

علما بأن: $Q = \frac{1}{\sigma_o^2}\Sigma$ أو بشكل آخر $\Sigma = \sigma_o^2 Q$ حيث Σ مصفوفة التباين (Variance-Covariance Matrix) والتي تمثل عناصرها القطرية قيم التباين وتمثل عناصرها غير القطرية قيم التباين المساعد.

مثال: احسب الانحراف المعياري للمساحة المحسوبة لقطعة أرض مستطيلة من قياسات طولها (L) وعرضها (W) كالآتي:

$$L = 113.25\ \text{m} \pm 0.02\ \text{m} \quad \text{and} \quad W = 52.63\ \text{m} \pm 0.01\ \text{m}$$

الحل: نكون أولا النموذج الرياضي الذي يربط الكمية المطلوب حساب انحرافها المعياري بالكميات المعلوم قيم انحرافها المعياري كالتالي:

$$\text{Area} = L\,W$$

وبتطبيق قانون انتقال الأخطاء:

$$\sigma^2_{\text{Area}} = \left(\frac{\partial}{\partial L}\right)^2 \sigma^2_L + \left(\frac{\partial}{\partial W}\right)^2 \sigma^2_W = (W)^2\,\sigma^2_L + (L)^2\sigma^2_W$$

$$\sigma^2_{\text{Area}} = (52.63)^2(0.02)^2 + (113.25)^2(0.01)^2 = 2.39\ \text{m}^4 \;\Rightarrow\; \sigma_{\text{Area}} = \pm\,1.54\ \text{m}^2$$

مثال: قطعة أرض ذو شكل مثلثي ABC قيس الضلعان AB و BC و الزاوية الداخلية B كالآتي:

$$AB = 105.45\ \text{m} \pm 0.02\ \text{m}\ ,\ BC = 97.28\ \text{m} \pm 0.02\ \text{m}\ ,\ \text{Angle } B = 50^\circ\, 30'\, 00'' \pm 10''$$

احسب الانحراف المعياري للمساحة المحسوبة لقطعة الأرض.

الحل:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ AB\ BC\ \sin B$$

وبتطبيق قانون انتقال الأخطاء:

$$\sigma^2_{\text{Area}} = \left(\frac{\partial}{\partial AB}\right)^2 \sigma^2_{AB} + \left(\frac{\partial}{\partial BC}\right)^2 \sigma^2_{BC} + \left(\frac{\partial}{\partial B}\right)^2 \sigma^2_B$$

$$\sigma^2_{\text{Area}} = \left(\frac{1}{2} BC\ \sin B\right)^2 \sigma^2_{AB} + \left(\frac{1}{2} AB\ \sin B\right)^2 \sigma^2_{BC} + \left(\frac{1}{2}\ AB\ BC\ \cos B\right)^2 \sigma^2_B$$

$$\sigma^2_{\text{Area}} = (40.68)^2(0.02)^2 + (37.53)^2(0.02)^2 + (3263)^2\left(\frac{10''}{206265''}\right)^2 = 1.25\ \text{m}^4$$

$$\sigma_{\text{Area}} = \pm\,1.12\ \text{m}^2$$

10. الضبط بطريقة أقل مجموع المربعات Least-Squares Adjustment

في غالبية الأعمال المساحية لا يكتفى برصد الحد الأدنى من الأرصاد الذي يلزم لحساب الكميات المجهولة بل يتم رصد أرصاد زائدة Redundant Observations عن الحد الأدنى. في حالة رصد الحد الأدنى من الأرصاد يتم التسليم بصحتها أي عدم احتوائها على أخطاء بحيث لا نستطيع الحكم على مدى جودتها أو جودة القيم المحسوبة منها. يؤدي وجود الأرصاد الزائدة إلى إتاحة الفرصة لعمل المراجعات Checks على الأرصاد لاكتشاف الأخطاء بالإضافة إلى توفير الأدوات لتقييم و تحليل الكميات المحسوبة. في نفس الوقت تؤدي الأخطاء العشوائية المتواجدة في الأرصاد - بعد تصحيحها للأخطاء المنتظمة - إلى التناقض بينها والذي يستلزم إجراء عملية ضبط لها نتوصل بواسطتها إلى أفضل قيم محسوبة Best Estimates للكميات المجهولة. تعد طريقة أقل مجموع المربعات Least-squares method من أفضل الطرق في ضبط الأرصاد المساحية من حيث الدقة وقابلية التعامل مع النماذج الرياضية المتعلقة بالتطبيقات المساحية المختلفة. تفرض هذه الطريقة شرطا متعلقا بالأرصاد المطلوب ضبطها وهو أن مجموع مربعات الأخطاء في هذه الأرصاد يساوي الحد الأدنى. ويمكن صياغة هذا الشرط – والذي يسمى Least-Squares Condition – في حالة تساوي أوزان الأرصاد كالأتي:

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = minimum \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = minimum$$

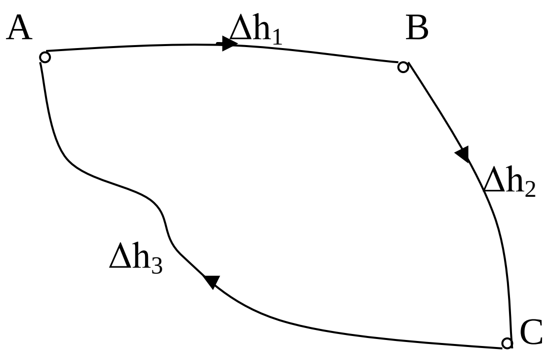
أما في حالة عدم تساوي أوزان الأرصاد فيتم صياغة الشرط في الصورة الآتية:

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 = minimum \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = minimum$$

تطبق طريقة أقل مجموع المربعات بأساليب ثلاث مختلفة. في الأسلوب الأول يتم صياغة معادلة لكل رصدة تربطها بالمجاهيل ذات العلاقة (Parametric Least-Squares Adjustment) وفي الأسلوب الثاني نعمل على صياغة عدد من المعادلات الشرطية التي تربط بين الأرصاد فقط (Conditional Least-Squares Adjustment) أما في الأسلوب الأخير فيتم صياغة معادلات تربط الأرصاد و المجاهيل معا (Combined Least-Squares Adjustment) ونضطر لاستخدام هذا الأسلوب في حلة تعذر استخدام الأسلوب الأول عندما لا نستطيع صياغة معادلة لكل رصدة على حدة وكذلك تعذر استخدام الأسلوب الثاني أيضا. والجدير بالذكر أن الأسلوب الأول هو الأكثر استخداما في التطبيقات المساحية.

و لتوضيح كيفية تطبيق الضبط بطريقة أقل مجموع المربعات باستخدام الأسلوب الأول نورد المثال التالي (مثال 1):

تم رصد فروق المناسيب بين النقاط A و B و C في شبكة الميزانية البسيطة الموضحة بالرسم للحصول على منسوبي النقطتين B و C علما بأن منسوب نقطة A = 100.00م. قيم فروق المناسيب المرصودة كما يلي: (Δh) $\Delta h_1 = +3.00$ m $\Delta h_2 = +4.00$ m $\Delta h_3 = -7.05$ m



لدينا في هذا المثال ثلاث أرصاد و اثنان من المجاهيل. باستخدام الأسلوب الأول لتطبيق طريقة أقل مجموع المربعات يتم صياغة ثلاث معادلات - تسمى معادلات الرصد Observation Equations - كالتالي:

$\Delta h_1 + v_1 = H_B - H_A$

$\Delta h_2 + v_2 = H_C - H_B$

$\Delta h_3 + v_3 = H_A - H_C$

بالتعويض بالقيم المعطاة تصبح المعادلات كالتالي:

$3.00 + v_1 = H_B - 100.00$

$4.00 + v_2 = H_C - H_B$

$-7.05 + v_3 = 100.00 - H_C$

من المعادلات أعلاه يمكن التعبير عن قيم الأخطاء v's كالأتي:

$v_1 = H_B - 103.00$, $v_2 = H_C - H_B - 4.00$, and $v_3 = 107.05 - H_C$

وبتطبيق شرط مجموع مربعات الأخطاء نحصل على المعادلة

$(H_B - 103.00)^2 + (H_C - H_B - 4.00)^2 + (107.05 - H_C)^2 = \text{min.}$

or F = min., with $F = (H_B - 103.00)^2 + (H_C - H_B - 4.00)^2 + (107.05 - H_C)^2$

وبما أن الدالة F تبلغ قيمتها الصغرى عندما تكون مشنقتها الأولى مساوية للصفر فانه بإيجاد المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمجهول H_B نجد أن

$2(H_B - 103.00) - 2(H_C - H_B - 4.00) = 0$

$(H_B - 103.00) - (H_C - H_B - 4.00) = 0$

$2H_B - H_C = 99.00$

و بإيجاد المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمجهول H_C نحصل على

$2\,(H_C - H_B - 4.00) - 2\,(107.05 - H_C) = 0$

$(H_C - H_B - 4.00) - (107.05 - H_C) = 0$

$2H_C - H_B = 111.05$

بحل المعادلتين الناتجتين من عملية التفاضل معا نحصل على قيمتي H_B و H_C كالتالي:

$H_B = 103.017$ m and $H_C = 107.033$ m

تسمى المعادلات الناتجة من عمليات التفاضل للدالة F بالمعادلات الطبيعية Normal Equations و يكون عددها مساويا لعدد المجاهيل.

بالتعويض بالقيم المحسوبة للمجاهيل في معادلات الرصد نحصل على قيم الأخطاء v's كالأتي:

$v_1 = 0.017$ m , $v_2 = 0.017$ m , and $v_3 = 0.017$ m

و تصبح الأرصاد المضبوطة (Adjusted Observations) كالأتي:

Adj. $\Delta h_1 = \Delta h_1 + v_1 = +3.017$ m , Adj. $\Delta h_2 = \Delta h_2 + v_2 = +4.017$ m , and

Adj. $\Delta h_3 = \Delta h_3 + v_3 = -7.033$ m

و بإعادة حل المثال بفرض أن أطوال مسارات الميزانية Leveling Routes معطاة كما يلي:

ro_1 = 1000 m , ro_2 = 1000 m , and ro_3 = 2000 m

وأن الأوزان تتناسب عكسيا مع أطوال المسارات نتبع الحل التالي:

نحسب الأوزان أولا كالأتي:

$p_1 : p_2 : p_3 = 1/1000 : 1/1000 : 1/2000 = 1 : 1 : 0.5$

بتطبيق شرط مجموع مربعات الأخطاء نحصل على المعادلة

$$1(H_B - 103.00)^2 + 1(H_C - H_B - 4.00)^2 + 0.5\,(107.05 - H_C)^2 = \min.$$

or $F = \min.$, with $F = (H_B - 103.00)^2 + (H_C - H_B - 4.00)^2 + 0.5\,(107.05 - H_C)^2$

وبما أن الدالة F تبلغ قيمتها الصغرى عندما تكون مشتقتها الأولى مساوية للصفر فانه بإيجاد المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمجهول H_B نجد أن

$$2(H_B - 103.00) - 2(H_C - H_B - 4.00) = 0$$

$$(H_B - 103.00) - (H_C - H_B - 4.00) = 0$$

$$2H_B - H_C = 99.00$$

و بإيجاد المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمجهول H_C نحصل على

$$2(H_C - H_B - 4.00) - (107.05 - H_C) = 0$$

$$3H_C - 2H_B = 115.05$$

بحل المعادلتين الناتجتين من عملية التفاضل معا نحصل على قيمتي H_B و H_C كالتالي:

H_B = 103.013 m and H_C = 107.025 m

وبالتعويض بهذه القيم في معادلات الرصد نحصل على قيم الأخطاء v's كالأتي:

v_1 = 0.013 m , v_2 = 0.013 m , and v_3 = 0.025 m

و تصبح الأرصاد المضبوطة كالأتي:

Adj. $\Delta h_1 = \Delta h_1 + v_1 = +3.013$ m , Adj. $\Delta h_2 = \Delta h_2 + v_2 = +4.013$ m , and
Adj. $\Delta h_3 = \Delta h_3 + v_3 = -7.025$ m

Solution by Using Matrix Form الحل باستخدام المصفوفات

يمكن حل المثال أيضا باستخدام المصفوفات. ولتوضيح كيفية العمل نبدأ أولا بإعادة صياغة معادلات الرصد السابقة بالشكل الأتي:

$$103.00 + v_1 = H_B$$

$$4.00 + v_2 = -H_B + H_C$$

$-107.05 + v_3 = \qquad - H_C$

حيث تم نقل القيم العددية الموجودة بالجانب الأيمن من المعادلات إلى الجانب الأيسر وجمعها على قيم الأرصاد و كذلك ترتيب المجاهيل عموديا. وبالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 103.00 \\ 4.00 \\ -107.05 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \end{bmatrix}$$

$$C \quad + \quad V \quad = \quad A \quad X$$

حيث:

C : متجه القيم العددية Vector of Absolute Terms

V : متجه الأخطاء الباقية Vector of Residual Errors

A : مصفوفة المعاملات Matrix of Coefficients

X : متجه القيم المجهولة Vector of Unknown parameters

مع ملاحظة أن العلاقة التالية تربط المتجه C بمتجه الأرصاد L :

$$C = L - D$$

حيث D هو متجه القيم العددية الموجودة بالجانب الأيمن من المعادلات.

ويحسب المتجه X كالتالي:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T C$$

وتسمى المصفوفة $(A^T A)$ مصفوفة المعادلات الطبيعية Normal Equation Matrix وهي مصفوفة مربعة (عدد صفوفها = عدد أعمدتها) ومتماثلة Square and Symmetric Matrix.

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 103.00 \\ 4.00 \\ -107.05 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.333 & 0.667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99.00 \\ 111.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103.017 \\ 107.033 \end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأخطاء V كالتالي:

$$V = A\,X - C$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 103.017 \\ 107.033 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 103.00 \\ 4.00 \\ -107.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.017 \\ 0.017 \\ 0.017 \end{bmatrix}$$

وللتأكيد على صحة الحسابات يجب أن تكون عناصر المصفوفة ($A^T V$) مساوية للصفر.

$$A^T V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.017 \\ 0.017 \\ 0.017 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة $\tilde{L}$ كالتالي:

$$\tilde{L} = L + V = \begin{bmatrix} 3.017 \\ 4.017 \\ -7.033 \end{bmatrix}$$

لحساب الانحراف المعياري $\widehat{\sigma_o}$ لرصدة وزنها الوحدة:

$$\widehat{\sigma_o} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-u}} = \sqrt{\frac{V^T V}{n-u}} = \pm 0.029 \text{ m}$$

و لحساب مصفوفة الدقة (Covariance Matrix Σ_{XX}) للقيم المحسوبة للمجاهيل:

$$Q_{XX} = (A^T A)^{-1}$$

$$\Sigma_{XX} = \widehat{\sigma_o^2}\, Q_{XX} = \begin{bmatrix} 0.0006 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

تحسب قيم الانحراف المعياري للقيم المحسوبة للمجاهيل بإيجاد جذور العناصر القطرية للمصفوفة Σ_{XX} :

$$\widehat{\sigma_{HB}} = \pm 0.024\, m$$

$$\widehat{\sigma_{HC}} = \pm 0.024\, m$$

ملحوظة: الانحراف المعياري لأي مجهول i يمكن أن نعبر عنه أيضا بالمعادلة الآتية:

$$\widehat{\sigma_{x_i}} = \widehat{\sigma_o} \sqrt{q_{ii}}$$

حيث q_{ii} هو العنصر القطري رقم i في المصفوفة Q_{XX}.

و لحساب مصفوفة الدقة ($\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}}$ Covariance Matrix) للقيم المضبوطة للأرصاد:

$$\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}} = \widehat{\sigma_o^2}\, A\, (A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0003 & -0.0003 \\ -0.0003 & 0.0006 & -0.0003 \\ -0.0003 & -0.0003 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

تحسب قيم الانحراف المعياري للقيم المحسوبة للمجاهيل بإيجاد جذور العناصر القطرية للمصفوفة $\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}}$ وهي تساوي 0.024 م لكل من لأرصاد الثلاث المضبوطة.

وبأخذ الأوزان في الاعتبار نكون أولا مصفوفة الأوزان وهي مصفوفة مربعة يحتوي قطرها على أوزان الأرصاد وعناصرها الغير قطرية أصفار. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

ويحسب المتجه X كالتالي:

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P C$$

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 103.00 \\ 4.00 \\ -107.05 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.50 \\ 0.50 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99.000 \\ 57.525 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103.013 \\ 107.025 \end{bmatrix}$$

ويحسب المتجه V كالتالي:

$$V = A X - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 103.013 \\ 107.025 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 103.00 \\ 4.00 \\ -107.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.013 \\ 0.013 \\ 0.025 \end{bmatrix}$$

وللتأكيد على صحة الحسابات يجب أن تكون عناصر المصفوفة ($A^T P V$) مساوية للصفر.

$$A^T P V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.013 \\ 0.013 \\ 0.025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة $\tilde{L}$ كالتالي:

$$\tilde{L} = L + V = \begin{bmatrix} 3.013 \\ 4.013 \\ -7.025 \end{bmatrix}$$

لحساب الانحراف المعياري $\widehat{\sigma_o}$ لرصدة وزنها الوحدة:

$$\widehat{\sigma_o} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-u}} = \pm 0.025 \text{ m}$$

و لحساب مصفوفة الدقة (Covariance Matrix Σ_{XX}) للقيم المحسوبة للمجاهيل:

$$Q_{XX} = (A^T P A)^{-1}$$

$$\Sigma_{XX} = \widehat{\sigma_o^2}\, Q_{XX} = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

تحسب قيم الانحراف المعياري للقيم المحسوبة للمجاهيل بإيجاد جذور العناصر القطرية للمصفوفة Σ_{XX} :

$$\widehat{\sigma_{HB}} = 0.021\, m$$

$$\widehat{\sigma_{HC}} = 0.025\, m$$

ملحوظة: الانحراف المعياري لأي مجهول i يمكن أن نعبر عنه أيضا بالمعادلة الآتية:

$$\widehat{\sigma_{x_i}} = \widehat{\sigma_o}\sqrt{q_{ii}}$$

حيث q_{ii} هو العنصر القطري رقم i في المصفوفة Q_{XX}.

و لحساب مصفوفة الدقة (Covariance Matrix $\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}}$) للأرصاد المضبوطة:

$$\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}} = \widehat{\sigma_o^2}\ A\ (\ A^T\ P\ A\ )^{-1}\ A^T = \begin{bmatrix} 0.0005 & -0.0002 & -0.0003 \\ -0.0002 & 0.0005 & -0.0003 \\ -0.0003 & -0.0003 & 0.0006 \end{bmatrix}$$

تحسب قيم الانحراف المعياري للأرصاد المضبوطة بإيجاد جذور العناصر القطرية للمصفوفة $\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}}$ وهي تساوي 0.022 م و 0.022 م و 0.025 م للأرصاد الثلاث المضبوطة على الترتيب.

استنتاج العلاقات المستخدمة في الضبط بطريقة أقل مجموع المربعات:

1- استنتاج العلاقة $X = (A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P\ C$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = V^T\ P\ V = (A\ X - C)^T\ P\ (A\ X - C) = (X^T\ A^T - C^T)\ P\ (A\ X - C)$$

$$= X^T\ A^T\ P\ AX - X^T\ A^T\ P\ C - C^T\ P\ AX - C^T\ P\ C$$

و بما أن القيمة $X^T\ A^T\ P\ C$ قيمة عددية (scalar) فان

$$X^T\ A^T\ P\ C = (X^T\ A^T\ P\ C)^T = C^T\ P\ AX$$

مما يؤدي أخيرا إلى

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = X^T\ A^T\ P\ AX - 2\ C^T\ P\ AX - C^T\ P\ C$$

ولتحقيق الشرط $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = \text{minimum}$ نوجد المشتقة الأولى للطرف الأيمن من المعادلة بالنسبة لمتجه المجاهيل X ونساويها بالصفر كالتالي:

$$2\ X^T\ A^T\ P\ A - 2\ C^T\ P\ A = 0$$

$$X^T\ A^T\ P\ A = C^T\ P\ A$$

$$(A^T\ P\ A)\ X = A^T\ P\ C$$

$$X = (A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P\ C$$

2- استنتاج العلاقة $\Sigma_{XX} = \widehat{\sigma_o}\ (\ A^T\ P\ A\ )^{-1}$

$$X = (A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P\ C$$

باستخدام قانون انتقال الأخطاء:

$$Q_{XX} = (A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P\ \ Q_{LL}\ \ [(A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P]^T$$

$$Q_{XX} = (A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P\ \ Q_{LL}\ \ P\ A\ (A^T\ P\ A)^{-1}$$

$$Q_{XX} = (A^T\ P\ A)^{-1}\ A^T\ P\ P^{-1}\ \ P\ A\ (A^T\ P\ A)^{-1}$$

$Q_{XX} = (A^T P A)^{-1} A^T P A (A^T P A)^{-1}$

$\Sigma_{XX} = \widehat{\sigma_o^2}\, Q_{XX} = \widehat{\sigma_o^2}\, (A^T P A)^{-1}$

3- استنتاج العلاقة $\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}} = \widehat{\sigma_o}\, A\, (A^T P A)^{-1} A^T$

$\tilde{L} = L + V$

$\tilde{L} = L + (A X - C)$

$\tilde{L} = L + [A X - (L - D)]$

$\tilde{L} = A X + D$

باستخدام قانون انتقال الأخطاء:

$Q_{\tilde{L}\tilde{L}} = A\, Q_{XX}\, A^T$

$Q_{\tilde{L}\tilde{L}} = A\, (A^T P A)^{-1} A^T$

$\Sigma_{\tilde{L}\tilde{L}} = \widehat{\sigma_o^2}\, Q_{\tilde{L}\tilde{L}}\, A^T = \widehat{\sigma_o^2}\, A\, (A^T P A)^{-1} A^T$

المثال السابق يمكن تعميمه على أي شبكة ميزانية بصرف النظر عن العدد الذي تتضمنه من مسارات مرصودة ونقاط يراد حساب مناسيبها. الفرق هنا في أنه مع ازدياد عدد المسارات والنقاط يزيد حجم العمل الحسابي - وخاصة في إيجاد المعكوس للمصفوفة A^TPA .

مثال 2 (إيجاد معاملات أفضل خط مستقيم يمر بمجموعة من النقاط):

معطى قياسات إحداثيات ثنائية الأبعاد (x,y) لأربع نقاط كما يلي:

$p_1\ (1, 9.5)$, $p_2\ (2, 9.0)$, $p_3\ (3, 8.0)$, $p_4\ (4, 7.5)$

بفرض أن إحداثيات x خالية من الخطأ احسب متغيرات أفضل خط مستقيم يربط بين هذه النقاط و كذلك قيم الأخطاء المحسوبة و الأرصاد المضبوطة طبقا لنظرية أقل مجموع المربعات.

الحل: يتم أولا كتابة 4 معادلات رصد (تأخذ صورة معادلة الخط المستقيم $y = a\,x + b$ حيث a و b متغيرات الخط المستقيم و اخذين في الاعتبار أن x قيم ثابتة و y قيم تحتمل الأخطاء):

$$\begin{aligned}
y_1 + v_1 &= a\,x_1 + b & \qquad & 9.5 + v_1 = a\,x_1 + b \\
y_2 + v_2 &= a\,x_2 + b & \Rightarrow \qquad & 9.0 + v_2 = a\,x_2 + b \\
y_3 + v_3 &= a\,x_3 + b & \qquad & 8.0 + v_3 = a\,x_3 + b \\
y_4 + v_4 &= a\,x_4 + b & \qquad & 7.5 + v_4 = a\,x_4 + b
\end{aligned}$$

بالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على:

$$\begin{bmatrix}9.5\\9.0\\8.0\\7.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$C \quad + \quad V \quad = \quad A \quad X$$

X (Solution vector) = $(A^T A)^{-1} A^T C$

$$X=\left(\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\3&1\\4&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}9.5\\9.0\\8.0\\7.5\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}0.2&-0.5\\-0.5&1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}81.5\\34.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.70\\10.25\end{bmatrix}$$

V (Vector of residual errors) = $A X - C = \begin{bmatrix}0.05\\-0.15\\0.15\\-0.05\end{bmatrix}$

$\tilde{L}$ (Adjusted vector of observations) = $L+V = \begin{bmatrix}9.55\\8.85\\8.15\\7.45\end{bmatrix}$

مثال 3 (إيجاد معاملات التحويل الخطي ثنائي الأبعاد):

معطى المعادلات اللازمة للتحويل بين نظامي إحداثيات ثنائيي الأبعاد (xy) و (x'y') كالتالي:

$$x' = a\,x + b\,y + c$$

$$y' = -b\,x + a\,y + d$$

معطى أيضا قياسات إحداثيات ثلاث نقاط في كل من النظامين:

$x_1 = 11.35,\ y_1 = -83.34 \qquad x_1' = 150.02,\ y_1' = 66.82$

$x_2 = 74.77,\ y_2 = -2.70 \qquad x_2' = 210.08,\ y_2' = 150.01$

x_3 = -51.93, y_3 = 12.85 x_3' = 82.82, y_3' = 160.35

بفرض أن إحداثيات x و y خالية من الخطأ أوجد عناصر التحويل و قيم الأخطاء المحسوبة و الأرصاد المضبوطة باستخدام نظرية أقل مجموع المربعات.

الحل: يتم أولا كتابة 6 معادلات رصد (معادلتين لكل نقطة) اخذين في الاعتبار أن إحداثيات x و y قيم ثابتة:

$$
\begin{aligned}
x'_1 + v_1 &= a x_1 + b y_1 + c & \quad 150.02 + v_1 &= a (11.35) + b (-83.34) + c \\
y'_1 + v_2 &= - b x_1 + a y_1 + d & \Rightarrow \quad 66.82 + v_2 &= - b (11.35) + a (-83.34) + d \\
x'_2 + v_3 &= a x_2 + b y_2 + c & \quad 210.08 + v_3 &= a (74.77) + b (-2.70) + c \\
y'_2 + v_4 &= - b x_2 + a y_2 + d & \quad 150.01 + v_4 &= - b (74.77) + a (-2.70) + d \\
x'_3 + v_3 &= a x_3 + b y_3 + c & \quad 82.82 + v_5 &= a (-51.93) + b (12.85) + c \\
y'_3 + v_4 &= - b x_3 + a y_3 + d & \quad 160.35 + v_6 &= - b (-51.93) + a (12.85) + d
\end{aligned}
$$

بالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على:

$$
\begin{bmatrix} 150.02 \\ 66.82 \\ 210.15 \\ 150.00 \\ 82.82 \\ 160.35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.35 & -83.34 & 1 & 0 \\ -83.34 & -11.35 & 0 & 1 \\ 74.77 & -2.70 & 1 & 0 \\ -2.70 & -74.77 & 0 & 1 \\ -51.93 & 12.85 & 1 & 0 \\ 12.85 & 51.93 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}
$$

$$C + V = A \quad X$$

$$
X \text{ (Solution vector)} = (A^T A)^{-1} A^T C = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -0.04 \\ 135.27 \\ 149.65 \end{bmatrix}
$$

$$V \text{ (Vector of residual errors)} = A\,X - C = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.02 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L} \text{ (Adjusted vector of observations)} = L + V = \begin{bmatrix} 150.03 \\ 66.80 \\ 210.13 \\ 150.01 \\ 82.83 \\ 160.37 \end{bmatrix}$$

على خلاف الأمثلة الثلاث السابقة التي تتضمن عدد من الأرصاد وعدد أقل من الكميات المجهولة نجد بعض التطبيقات المساحية التي لا تحتوي على كميات مجهولة ولكن يكون المطلوب إيجاد القيم المضبوطة للكميات المرصودة. في هذه الحالة يستخدم عادة الأسلوب الثاني الذي يتبنى استخدام المعادلات الشرطية (Conditional Least-Squares Adjustment) و لكن لكي نتمكن من استخدام الأسلوب الأول الذي يعتمد على توظيف معادلات الرصد (Parametric Least-Squares Adjustment) يجب تحديد عدد من المجاهيل يساوي الحد الأدنى الكافي من الأرصاد بحيث تمثل هذه المجاهيل القيم المضبوطة للأرصاد المناظرة. الأمثلة اللاحقة توضح الفكرة.

مثال 4 (رصد مسافة على أجزاء):

ثلاث نقاط A و B و C تقع على خط مستقيم واحد. قيست المسافات AB و BC و AC كالأتي:

$$AB = 35.13 \pm 0.01 \text{ m}\ ,\ BC = 47.25 \pm 0.01\text{m}\ ,\ AC = 82.44 \pm 0.02\text{m}$$

أوجد قيم القياسات المضبوطة باستخدام نظرية أقل مجموع المربعات.

الحل: يوجد في هذا المثال ثلاث أرصاد في حين أن الحد الأدنى الضروري رصدتين فقط. لذا يتم كتابة 3 معادلات رصد تحتوي على مجهولين x_1 و x_2 (وليكونا القيم المضبوطة للمسافتين AB و BC):

$$\begin{aligned} L_1 + v_1 &= x_1 & & & 35.13 + v_1 &= x_1 \\ L_2 + v_2 &= x_2 & &\Rightarrow & 47.25 + v_2 &= x_2 \\ L_3 + v_3 &= x_1 + x_2 & & & 82.40 + v_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

بالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على

$$\begin{bmatrix}35.13\\47.25\\82.44\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$C \quad + V \;=\; A \quad X$$

$p_1 : p_2 : p_3 = 1/(0.01)^2 : 1/(0.01)^2 : 1/(0.02)^2 = 4 : 4 : 1$

مصفوفة الأوزان :

$$P = \begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

X (Solution vector) = $(A^T P A)^{-1} A^T P C$

$$X = \begin{bmatrix}0.208 & -0.042\\ -0.042 & 0.208\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}222.96\\271.44\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}35.14\\47.26\end{bmatrix}$$

V (Vector of residual errors) = A X – C = $\begin{bmatrix}0.01\\0.01\\-0.04\end{bmatrix}$

$\tilde{L}$ (Adjusted vector of observations) = L+V = $\begin{bmatrix}35.14\\47.26\\82.40\end{bmatrix}$

مثال 5 (رصد زوايا أفقية بمثلث):

قيست الزوايا الداخلية (θ_1 , θ_2 , θ_3) في مثلث ABC وكذلك الزاوية الخارجية (θ_4) عند نقطة B وكانت القياسات كما يلي:

$\theta_1 = 56° 30' \pm 1'$, $\theta_2 = 50° 45' \pm 1'$, $\theta_3 = 72° 54' \pm 2'$, $\theta_4 = 309° 18' \pm 2'$

أوجد قيم القياسات المضبوطة باستخدام نظرية أقل مجموع المربعات.

الحل: يوجد في هذا المثال أربع أرصاد في حين أن الحد الأدنى الضروري رصدتين فقط. لذا يتم كتابة 4 معادلات رصد تحتوي على مجهولين x_1 و x_2 (وليكونا القيم المضبوطة للزاويتين θ_1 و θ_2):

$\theta_1 + v_1 = x_1$ $\qquad\qquad$ $56.50 + v_1 = x_1$

$\theta_2 + v_2 = x_2$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ $50.75 + v_2 = x_2$

$\theta_3 + v_3 = 180 - x_1 - x_2$ $\qquad\qquad$ $72.90 - 180 + v_3 = - x_1 - x_2$

$\theta_4 + v_3 = 360 - x_2$ $\qquad\qquad$ $309.30 - 360 + v_4 = - x_2$

بالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 56.50 \\ 50.75 \\ -107.10 \\ -50.70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$C \quad + \; V \quad = \quad A \quad X$$

$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = 1 : 1 : 0.25 : 0.25$

مصفوفة الأوزان :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

X (Solution vector) = $(A^T P A)^{-1} A^T P C$

$$X = \begin{bmatrix} 0.828 & -0.138 \\ -0.138 & 0.690 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83.275 \\ 90.200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.476 \\ 50.721 \end{bmatrix}$$

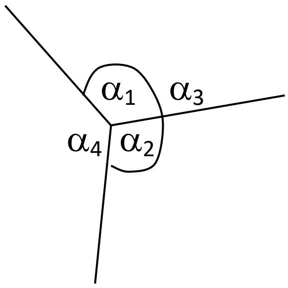
V (Vector of residual errors) = A X – C = $\begin{bmatrix} -0.024 \\ -0.029 \\ -0.097 \\ -0.021 \end{bmatrix}$

$\tilde{L}$ (Adjusted vector of observations) = L+V = $\begin{bmatrix} 56.476 \\ 50.721 \\ 72.803 \\ 309.279 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56^\circ\, 29' \\ 50^\circ\, 43' \\ 72^\circ\, 48' \\ 309^\circ\, 17' \end{bmatrix}$

مثال 6 (رصد زوايا أفقية حول نقطة):

رصدت الزوايا الأفقية ($\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4$) حول نقطة A كما بالشكل وكانت الأرصاد كالتالي:

α_1 = 110° 15' ± 1', α_2 = 120° 20' ± 2', α_3 = 230° 30' ± 2', α_4 = 129° 30' ± 3'



أوجد قيم الأرصاد المضبوطة باستخدام نظرية أقل مجموع المربعات.

الحل: يوجد في هذا المثال أربع أرصاد في حين أن الحد الأدنى الضروري رصدتين فقط. لذا يتم كتابة 4 معادلات رصد تحتوي على مجهولين x_1 و x_2 (وليكونا القيم المضبوطة للزاويتين θ_1 و θ_2):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + v_1 &= x_1 & & & 110.25 + v_1 &= x_1 \\
\alpha_2 + v_2 &= x_2 & &\Rightarrow & 120.33 + v_2 &= x_2 \\
\alpha_3 + v_3 &= x_1 + x_2 & & & 230.50 + v_3 &= x_1 + x_2 \\
\alpha_4 + v_3 &= 360 - x_1 - x_2 & & & 129.50 - 360 + v_4 &= - x_1 - x_2
\end{aligned}$$

بالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على

$$\begin{bmatrix} 110.25 \\ 120.33 \\ 230.50 \\ -230.50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$C \quad + \quad V \quad = \quad A \quad X$$

$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = 1 : 0.25 : 0.25 : 0.11$

مصفوفة الأوزان :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.11 \end{bmatrix}$$

X (Solution vector) = $(A^T P A)^{-1} A^T P C$

$$X = \begin{bmatrix} 0.871 & -0.514 \\ -0.514 & 1.943 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 193.230 \\ 113.063 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.24 \\ 120.29 \end{bmatrix}$$

$$V \text{ (Vector of residual errors)} = A X - C = \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.04 \\ 0.03 \\ -0.03 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L} \text{ (Adjusted vector of observations)} = L + V = \begin{bmatrix} 110.24 \\ 120.29 \\ 230.53 \\ 129.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110^\circ\ 14' \\ 120^\circ\ 17' \\ 230^\circ\ 32' \\ 129^\circ\ 28' \end{bmatrix}$$

مثال 7 (تكرار رصد مسافة عدد من المرات):

مسافة d قيست ثلاث مرات متكرر (d_1, d_2, d_3) بأوزان (p_1, p_2, p_3) على الترتيب. أثبت أن القيمة المحسوبة للمسافة باستخدام نظرية أقل مجموع المربعات تكافئ المتوسط الحسابي الموزون للأرصاد.

الحل: يوجد في هذا المثال ثلاث أرصاد في حين أن الحد الأدنى الضروري رصدة واحدة فقط. لذا يتم كتابة 3 معادلات رصد تحتوي على مجهول واحد x يمثل القيمة المضبوطة للمسافة:

$d_1 + v_1 = x$

$d_2 + v_2 = x$

$d_3 + v_3 = x$

بالتعبير عن المعادلات الناتجة في صورة مصفوفات Matrix Form نحصل على:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [x]$$

$$C \;+\; V \;=\; A \;\; X$$

مصفوفة الأوزان :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

X (Solution vector) = $(A^T P A)^{-1} A^T P C$

$$X = \left([1 \;\; 1 \;\; 1]^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \;\; 1 \;\; 1]^T \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$X = [p_1 + p_2 + p_3]^{-1} [p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3]$$

$$= [p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3] \,/\, [p_1 + p_2 + p_3]$$

= Weighted Arithmetic Mean

التعامل مع النماذج الرياضية غير الخطية (Non-Linear Mathematical Models)

الكثير من التطبيقات المساحية يحتوي نماذج رياضية غير خطية وهي في الغالب التطبيقات التي تتناول حساب إحداثيات النقاط مثلما في مسائل التقاطع الأمامي والخلفي و المضلعات وشبكات المثلثات. المثال التالي يوضح الخطوات المتبعة للحل في هذه الحالة.

مثال 8 (تقاطع عكسي مساحي):

في مسألة تقاطع عكسي تم قياس المسافتين PA و PB من نقطة مجهولة الإحداثيات P إلى نقطتين A و B معلومتي الإحداثيات. قيست أيضا الزاوية APB و كانت قيم القياسات كالأتي:

Distance PA = 2961.32 m , Distance PB = 2501.10 m , Angle APB = 38° 46' 29''

أما قيم الإحداثيات المعلومة فكانت كالأتي:

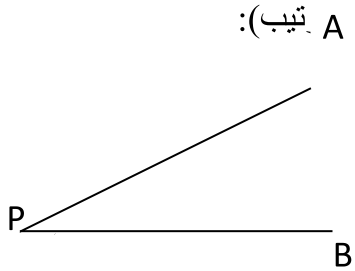
E_A = 17709.62 m , N_A = 12279.78 m , E_B = 17901.90 m , N_B = 10425.40 m

وكانت قيم الإحداثيات التقريبية لنقطة P كالأتي:

E_P = 15413.70 m , N_P = 10415.10 m

أوجد إحداثيات نقطة P باستخدام طريقة أقل مجموع المربعات.

الحل: يحتوي المثال على 3 أرصاد و مجهولين و على ذلك نكتب ثلاث معادلات رصد كالتالي (مع ملاحظة استخدام الرموز d_1 و d_2 و θ في التعبير عن المسافة PA والمسافة PB و الزاوية APB على الترتيب):



$$d_1 + v_1 = \sqrt{\left(E_A - E_P\right)^2 + \left(N_A - N_P\right)^2} = F1$$

$$d_2 + v_2 = \sqrt{\left(E_B - E_P\right)^2 + \left(N_B - N_P\right)^2} = F2$$

$$\theta + v_3 = \arctan\frac{E_B - E_P}{N_B - N_P} - \arctan\frac{E_A - E_P}{N_A - N_P} = F3$$

معادلات الرصد غير خطية ويلزم تحويلها إلي الصورة الخطية (Linearized Form) لأن طريقة أقل مجموع المربعات لا تتعامل إلا مع النماذج الرياضية الخطية. معادلة الرصد الأولى يمكن تحويلها إلى الصورة الخطية كالأتي:

$$d_1 + v_1 = F1(E_P, N_P)$$

$$d_1 + v_1 = F1(E_P^o, N_P^o) + \frac{\partial F1}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}(E_P - E_P^o) + \frac{\partial F1}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}(N_P - N_P^o)$$

$$(d_1 - F1(E_P^o, N_P^o)) + v_1 = \frac{\partial F1}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}\delta E_P + \frac{\partial F1}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}\delta N_P$$

وبالمثل تتحول المعادلتان الثانية و الثالثة إلى الصورة الخطية كالأتي:

$$(d_2 - F2(E_P^o, N_P^o)) + v_1 = \frac{\partial F2}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}\delta E_P + \frac{\partial F2}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}\delta N_P$$

$$(\theta - F3(E_P^o, N_P^o)) + v_1 = \frac{\partial F3}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}\delta E_P + \frac{\partial F3}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}\delta N_P$$

و بدمج المعادلات الخطية الناتجة في صورة مصفوفات نحصل على الآتي:

$\Delta L + V = A\,\Delta X$

حيث:

ΔL : متجه الفروق بين قيم الأرصاد و قيمها المحسوبة من معادلات الرصد بدلالة القيم التقريبية للمجاهيل ويمكن التعبير عنه كالأتي:

$$\Delta L = \begin{bmatrix} d_1 - F1(E_P^o, N_P^o) \\ d_2 - F2(E_P^o, N_P^o) \\ \theta - F3(E_P^o, N_P^o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1^o \\ d_1^o \\ \theta^o \end{bmatrix} = L - L^o$$

V : متجه الأخطاء الباقية

A : مصفوفة المشتقة الأولى بالنسبة للمجاهيل محسوبة عند القيم التقريبية لها ويمكن صياغتها كالأتي:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial E_P} & \frac{\partial F1}{\partial N_P} \\ \frac{\partial F2}{\partial E_P} & \frac{\partial F2}{\partial N_P} \\ \frac{\partial F3}{\partial E_P} & \frac{\partial F3}{\partial N_P} \end{bmatrix} \Bigg|_{x=x^o}$$

ΔX : متجه الحل $\begin{bmatrix} \delta E_P \\ \delta N_P \end{bmatrix}$ و يمثل القيم اللازمة لتحديث قيم المجاهيل الأولية x^o (أو $\begin{bmatrix} E_P^o \\ N_P^o \end{bmatrix}$) للحصول على قيمها المضبوطة x كالأتي:

$$\Delta X = (A^T A)^{-1} A^T \Delta L$$

و تحسب الكميات المضبوطة X للمجاهيل كالأتي:

$$X = \Delta X + X^o$$

بحيث يتم تكرار الحل عدد من المرات حتى تقترب عناصر المتجه ΔX من الصفر مع مراعاة تحديث قيم عناصر المصفوفة A و المتجه L في كل مرة باستخدام القيم المحسوبة مجددا لعناصر متجه المجاهيل X.

والخطوات التالية توضح العمليات الحسابية المصاحبة لحل المثال تفصيلا:

$$\frac{\partial F1}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}=\left(\frac{1}{2\sqrt{(E_A - E_P^o)^2+(N_A - N_P^o)^2}}\right)[2(E_A - E_P^o)](-1)=\frac{-(E_A - E_P^o)}{\sqrt{(E_A - E_P^o)^2+(N_A - N_P^o)^2}}$$

$$= -0.7762$$

$$\frac{\partial F1}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}=\left(\frac{1}{2\sqrt{(E_A - E_P^o)^2+(N_A - N_P^o)^2}}\right)[2(N_A - N_P^o)](-1)=\frac{-(N_A - N_P^o)}{\sqrt{(E_A - E_P^o)^2+(N_A - N_P^o)^2}}$$

$$= -0.6304$$

$$\frac{\partial F2}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}=\left(\frac{1}{2\sqrt{(E_B - E_P^o)^2+(N_B - N_P^o)^2}}\right)[2(E_B - E_P^o)](-1)=\frac{-(E_B - E_P^o)}{\sqrt{(E_B - E_P^o)^2+(N_B - N_P^o)^2}}$$

$$= -1$$

$$\frac{\partial F2}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}=\left(\frac{1}{2\sqrt{(E_B - E_P^o)^2+(N_B - N_P^o)^2}}\right)[2(N_B - N_P^o)](-1)=\frac{-(N_B - N_P^o)}{\sqrt{(E_B - E_P^o)^2+(N_B - N_P^o)^2}}$$

$$= -0.0041$$

$$\frac{\partial F3}{\partial E_P}\Big|_{x=x^o}=\left(\frac{1}{1+\frac{(E_B - E_P^o)^2}{(N_B - N_P^o)^2}}\right)\left(\frac{-1}{N_B - N_P^o}\right) - \left(\frac{1}{1+\frac{(E_A - E_P^o)^2}{(N_A - N_P^o)^2}}\right)\left(\frac{-1}{N_A - N_P^o}\right)$$

$$= \frac{-(N_B - N_P^o)}{(E_B - E_P^o)^2+(N_B - N_P^o)^2} - \frac{-(N_A - N_P^o)}{(E_A - E_P^o)^2+(N_A - N_P^o)^2} \quad = 0.0002\ \frac{1}{m}$$

$$\frac{\partial F3}{\partial N_P}\Big|_{x=x^o}=\left(\frac{1}{1+\frac{(E_B - E_P^o)^2}{(N_B - N_P^o)^2}}\right)\left(\frac{(E_B - E_P^o)}{(N_B - N_P^o)^2}\right) - \left(\frac{1}{1+\frac{(E_A - E_P^o)^2}{(N_A - N_P^o)^2}}\right)\left(\frac{(E_A - E_P^o)}{(N_A - N_P^o)^2}\right)$$

$$= \frac{(E_B - E_P^o)}{(E_B - E_P^o)^2 + (N_B - N_P^o)^2} - \frac{(E_A - E_P^o)}{(E_A - E_P^o)^2 + (N_A - N_P^o)^2} = 0.0001 \ \frac{1}{m}$$

$$\Delta L = L - L^o = \begin{bmatrix} 2961.32 \\ 2501.10 \\ 0.67675 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2957.75 \\ 2488.22 \\ 0.67798 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.57 \text{ m} \\ 12.88 \text{ m} \\ -0.00123 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

$$\Delta X^{(1)} = (A^T A)^{-1} A^T \Delta L = \begin{bmatrix} 1.0103 & -1.2545 \\ -1.2544 & 4.0735 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15.6504 \\ -2.3045 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.92 \\ 10.25 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$X^{(1)} = X^o + \Delta X^{(1)} = \begin{bmatrix} 15413.70 \\ 10415.10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12.92 \\ 10.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15400.78 \\ 10425.35 \end{bmatrix} \text{ m}$$

و بتكرار الحل للمرة الثانية مع مراعاة تحديث قيم عناصر المصفوفة A و المتجه L باستخدام القيم المحسوبة لعناصر متجه المجاهيل $X^{(1)}$. نحصل على القيم المحدثة $\Delta X^{(2)}$ و $X^{(2)}$ كالآتي :

$$\Delta X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(2)} = \begin{bmatrix} 15400.78 \\ 10425.35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15400.80 \\ 10425.39 \end{bmatrix} \text{ m}$$

و بتكرار الحل للمرة الثالثة مع مراعاة تحديث قيم عناصر المصفوفة A و المتجه L باستخدام القيم المحسوبة لعناصر متجه المجاهيل $X^{(2)}$. نحصل على القيم المحدثة $\Delta X^{(3)}$ و $X^{(3)}$ كالآتي :

$$\Delta X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \text{ m}$$

بذلك نتوقف عن تكرار الحل ونحصل على القيم النهائية المحسوبة للمجاهيل كالأتي:

$$X = \begin{bmatrix} 15400.80 \\ 10425.39 \end{bmatrix} \text{ m}$$

الحل باستخدام الاسلوب الشرطي Conditional Least-Squares Technique

لتوضيح كيفية تطبيق الضبط بطريقة أقل مجموع المربعات باستخدام الأسلوب الشرطي نعود الى مثال الميزانية (صفحة 9) والذي يعرض شبكة ميزانية بسيطة رصد فيها فروق المناسيب بين نقاط الشبكة A و B و C للحصول على منسوبي النقطتين B و C بمعلومية منسوب نقطة A.

عدد المعادلات الشرطية = عدد الارصاد – الحد الأدنى الضروري من الارصاد

$$1 = 2 - 3 =$$

و بذلك يمكن كتابة معادلة شرطية واحدة كالاتي:

$$(\Delta h_1 + v_1) + (\Delta h_2 + v_2) + (\Delta h_3 + v_3) = 0$$

و التي يمكن صياغتها كالاتي:

$$v_1 + v_2 + v_3 = -(\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3)$$

كما يمكن التعبير عنها بالمصفوفات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3) \end{bmatrix}$$

$$B \quad V = W$$

حيث:

B : مصفوفة المعاملات Matrix of Coefficients

V : متجه الأخطاء الباقية Vector of Residual Errors

W : متجه القيم العددية Vector of Absolute Terms

و بالتعويض عن قيم الأرصاد نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \end{bmatrix}$$

تحسب قيم الأخطاء الباقية كالاتي:

$$V = B^T (B B^T)^{-1} W$$

$$V=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}[0.05]$$

$$V=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[0.333]\,[0.05]=\begin{bmatrix}0.333\\0.333\\0.333\end{bmatrix}[0.05]=\begin{bmatrix}0.017\\0.017\\0.017\end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة $\tilde{L}$ كالتالي:

$$\tilde{L}=L+V=\begin{bmatrix}3.017\\4.017\\-7.033\end{bmatrix}$$

و يتم الحصول على منسوبي النقطتين B و C كالاتي:

$$H_B = H_A + \tilde{L}_1 = 103.017$$

$$H_C = H_B + \tilde{L}_2 = 107.034$$

و بإعادة حل المثال بأخذ الأوزان في الاعتبار تحسب قيم الأخطاء الباقية كالاتي:

$$V=P^{-1}B^T(B\,P^{-1}\,B^T)^{-1}\,W$$

$$V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}[0.05]$$

$$V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[0.25]\,[0.05]=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}[0.25]\,[0.05]=\begin{bmatrix}0.013\\0.013\\0.025\end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة $\tilde{L}$ كالتالي:

$$\tilde{L} = L+V = \begin{bmatrix} 3.013 \\ 4.013 \\ -7.025 \end{bmatrix}$$

و يتم الحصول على منسوبي النقطتين B و C كالاتي:

$$H_B = H_A + \tilde{L}_1 = 103.013$$

$$H_C = H_B + \tilde{L}_2 = 107.026$$

و بحل مثال زوايا المثلث (صفحة 21) مرة أخرى باستخدام الأسلوب الشرطي:

عدد المعادلات الشرطية = عدد الارصاد – الحد الأدنى الضروري من الارصاد

= 4 – 2 = 2

و بذلك يمكن كتابة معادلتين شرطيتين كالاتي:

$$(\theta_1 + v_1) + (\theta_2 + v_2) + (\theta_3 + v_3) = 180$$

$$(\theta_2 + v_2) + (\theta_4 + v_4) = 360$$

و التي يمكن صياغتهما كالاتي:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 180 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$v_2 + v_4 = 360 - (\theta_2 + \theta_4)$$

كما يمكن التعبير عنهما بالمصفوفات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 360 - (\theta_2 + \theta_4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$B \quad V = W$$

تحسب قيم الأخطاء الباقية كالاتي:

$$V = P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} W$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.15 \\ -0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.024 \\ -0.029 \\ -0.097 \\ -0.021 \end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة كالتالي:

$$\tilde{\theta} = \theta + V = \begin{bmatrix} 56.476 \\ 50.721 \\ 72.803 \\ 309.28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56^\circ\ 29' \\ 50^\circ\ 43' \\ 72^\circ\ 48' \\ 309^\circ\ 17' \end{bmatrix}$$

حل المعادلات الشرطية غير الخطية

المثال التالي يوضح الخطوات المتبعة للحل في هذه الحالة.

قيست الزوايا الداخلية في مثلث ABC وكذلك أطوال أضلاعه وكانت القياسات كما يلي:

$A = 14^o\ 25'\ 18''$, $B = 58^o\ 16'\ 04''$, $C = 107^o\ 19'\ 12''$

AB = 296.05 m , BC = 77.18 m , AC = 263.75 m

أوجد القيم المضبوطة لهذه القياسات باستخدام نظرية أقل مجموع المربعات.

الحل:

عدد المعادلات الشرطية = عدد الارصاد – الحد الأدنى الضروري من الارصاد

3 = 3 – 6 =

و بذلك يمكن كتابة ثلاث معادلات شرطية كالاتي:

$$(A + v_1) + (B + v_2) + (C + v_3) = 180^\circ$$

Linearized form of eqn. AB sin A – BC sin C = 0 (since AB/sin C = BC/sin A)

Linearized form of eqn. AB sin B – AC sin C = 0 (since AB/sin C = AC/sin B)

و التي يمكن صياغتها كالاتي:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 180 - (A + B + C)$$

$$(AB \cos A)\, v_1 - (BC \cos C)\, v_3 + (\sin A)\, v_4 - (\sin C)\, v_5 = 0 - (AB \sin A - BC \sin C)$$

$$(AB \cos B)\, v_2 - (AC \cos C)\, v_3 + (\sin B)\, v_4 - (\sin C)\, v_6 = 0 - (AB \sin B - AC \sin C)$$

كما يمكن التعبير عنها بالمصفوفات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ABcosA & 0 & -BCcosC & sinA & -sinC & 0 \\ 0 & ABcosB & -ACcosC & sinB & 0 & -sinC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [180^\circ - A - B - C] * \pi/180 \\ -(AB \sin A - BC \sin C) \\ -(AB \sin B - AC \sin C) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 286.7211 & 0 & 22.9771 & 0.2490 & -0.9546 & 0 \\ 0 & 155.7075 & 78.5205 & 0.8505 & 0 & -0.9546 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.65x10^{-4} \\ -0.0526 \\ -0.0043 \end{bmatrix}$$

$$B \qquad V = W$$

تحسب قيم الأخطاء الباقية كالاتي:

$$V = B^T (B B^T)^{-1} W$$

$$V = 10^{-3}\begin{pmatrix} -0.1923 \text{ rad} \\ -0.0834 \text{ rad} \\ +0.1107 \text{ rad} \\ -0.0032 \text{ m} \\ +0.0020 \text{ m} \\ +0.0030 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40'' \\ -17'' \\ +23'' \\ 0.00 \text{ m} \\ 0.00 \text{ m} \\ 0.00 \text{ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة كالتالي:

$$\tilde{L} = L + V = \begin{pmatrix} 14° \, 25' \, 18'' \\ 58° \, 16' \, 04'' \\ 107° \, 19' \, 12'' \\ 296.05 \\ 77.18 \\ 263.75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40'' \\ -17'' \\ +23'' \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14° \, 24' \, 38'' \\ 58° \, 15' \, 47'' \\ 107° \, 19' \, 35'' \\ 296.05 \text{ m} \\ 77.18 \text{ m} \\ 263.75 \text{ m} \end{pmatrix}$$

الحل باستخدام الاسلوب المدمج Combined Least-Squares Technique

و لتوضيح كيفية تطبيق الضبط بطريقة أقل مجموع المربعات باستخدام هذا الأسلوب نعود مرة أخرى الى مسألة حساب معاملات التحويل الخطي ثنائي الأبعاد ولكن هذه المرة بعدم فرض أن إحداثيات x و y خالية من الخطأ علما بأن قيم الاحداثيات المرصودة كما يلي:

$x_1 = 11.36, \; y_1 = -83.33 \qquad x_1' = 150.05, \; y_1' = 66.84$

$x_2 = 74.78, \; y_2 = -2.70 \qquad x_2' = 210.07, \; y_2' = 150.01$

$x_3 = -51.96, \; y_3 = 12.86 \qquad x_3' = 82.85, \; y_3' = 160.35$

يتم أولا كتابة 6 معادلات رصد (معادلتين لكل نقطة) كما يلي:

$$x'_1 + v_1 = a\,(x_1 + v_7) + b\,(y_1 + v_8) + c$$

$$y'_1 + v_2 = -b\,(x_1 + v_7) + a\,(y_1 + v_8) + d$$

$$x'_2 + v_3 = a\,(x_2 + v_9) + b\,(y_2 + v_{10}) + c$$

$$y'_2 + v_4 = -b\,(x_2 + v_9) + a\,(y_2 + v_{10}) + d$$

$$x'_3 + v_5 = a\,(x_3 + v_{11}) + b\,(y_3 + v_{12}) + c$$

$$y'_3 + v_6 = -b\,(x_3 + v_{11}) + a\,(y_3 + v_{12}) + d$$

و التي يمكن صياغتها كالاتي بعد التعويض بقيم الأرصاد:

$$150.05 + v_1 - a\,(11.36 + v_7) - b\,(-83.33 + v_8) - c = 0$$

$$66.84 + v_2 + b\,(11.36 + v_7) - a\,(-83.33 + v_8) - d = 0$$

$$210.07 + v_3 - a\,(74.78 + v_9) - b\,(-2.70 + v_{10}) - c = 0$$

$$150.01 + v_4 + b\,(74.78 + v_9) - a\,(-2.70 + v_{10}) - d = 0$$

$$82.85 + v_5 - a\,(-51.96 + v_{11}) - b\,(12.86 + v_{12}) - c = 0$$

$$160.35 + v_6 + b\,(-51.96 + v_{11}) - a\,(12.86 + v_{12}) - d = 0$$

كما يمكن التعبير عنها بالمصفوفات كالتالي:

$$A\,X + B\,V = K$$

مع التعويض في المسفوفات بالقيم التقريبية لعناصر التحويل و التي يمكن ايجادها بحل أي اربعة معادلات و اعتبار جميع الأرصاد خالية من الخطأ. القيم الاتية قيم تقريبية جيدة لعناصر التحويل:

$$a^o = 1,\ b^o = -0.04,\ c^o = 135.25,\ \text{and}\ d^o = 149.61$$

$$A\,X = \begin{bmatrix} -11.36 & 83.33 & -1 & 0 \\ 83.33 & 11.36 & 0 & -1 \\ -74.78 & 02.70 & -1 & 0 \\ 02.70 & 74.78 & 0 & -1 \\ 51.96 & -12.86 & -1 & 0 \\ -12.86 & -51.96 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$B\,V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

with

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +0.04 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +0.04 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +0.04\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & -1\end{bmatrix}$$

and

$$K=\begin{bmatrix}-(150.05-11.36\ (1)+83.33\ (-0.04)-135.25)\\ -(66.84+11.36\ (-0.04)+83.33\ (1)-149.61)\\ -(210.07-74.78\ (1)+2.70\ (-0.04)-135.25)\\ -(150.01+74.78\ (-0.04)+2.70\ (1)-149.61)\\ -(82.85+51.96\ (1)-12.86\ (-0.04)-135.25)\\ -(160.35-51.96\ (-0.04)-12.86\ (1)-149.61)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.110\\ -0.106\\ +0.068\\ -0.109\\ -0.074\\ +0.042\end{bmatrix}$$

و يتم ايجاد متجه الحل ΔX (أو $\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\\ \Delta c\\ \Delta d\end{bmatrix}$) و الذي يمثل القيم اللازمة لتحديث قيم المجاهيل الأولية X^o (أو $\begin{bmatrix}a^o\\ b^o\\ c^o\\ d^o\end{bmatrix}$) كالأتي:

$$\Delta X = (A^T\ (B\ B^T)^{-1}\ A)^{-1}\ \ (A^T\ (B\ B^T)^{-1}\ K)$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix}-0.001\\ -0.001\\ +0.024\\ +0.019\end{bmatrix}$$

و تحسب الكميات المحسوبة X للمجاهيل كالأتي:

$$X = X^o + \Delta X$$

$$X=\begin{bmatrix}+0.999\\ -0.041\\ 135.274\\ 149.629\end{bmatrix}$$

و بحيث يتم تكرار الحل عدد من المرات حتى تقترب عناصر المتجه ΔX من الصفر مع مراعاة تحديث قيم عناصر المصفوفة B والمتجه K في كل مرة باستخدام القيم المحسوبة مجددا لعناصر متجه المجاهيل X .

ويحسب متجه الأخطاء V كالتالي:

$$V = B^T (BB^T)^{-1} (K - AX)$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.003 \\ +0.008 \\ +0.007 \\ -0.002 \\ -0.004 \\ -0.005 \\ +0.003 \\ -0.008 \\ -0.007 \\ +0.003 \\ +0.004 \\ +0.005 \end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة كما يلي:

$$\tilde{L} = L+V = \begin{bmatrix} 150.05 \\ 66.84 \\ 210.07 \\ 150.01 \\ 82.85 \\ 160.35 \\ 11.36 \\ -83.33 \\ 74.78 \\ -2.70 \\ -51.96 \\ 12.86 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.003 \\ +0.008 \\ +0.007 \\ -0.002 \\ -0.004 \\ -0.005 \\ +0.003 \\ -0.008 \\ -0.007 \\ +0.003 \\ +0.004 \\ +0.005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150.047 \\ 66.848 \\ 210.077 \\ 150.008 \\ 82.846 \\ 160.345 \\ 11.363 \\ -83.338 \\ 74.773 \\ -2.694 \\ -51.956 \\ 12.865 \end{bmatrix}$$

مثال (إيجاد معاملات أفضل خط مستقيم يمر بمجموعة من النقاط):

معطى قياسات إحداثيات ثنائية الأبعاد (x,y) لأربع نقاط كما يلي:

$p_1\ (2 , 2.2)$, $p_2\ (3 , 2.9)$, $p_3\ (4 , 4.2)$, $p_4\ (5 , 5.1)$

احسب متغيرات أفضل خط مستقيم يربط بين هذه النقاط و كذلك قيم الأخطاء المحسوبة و الأرصاد المضبوطة طبقا لنظرية أقل مجموع المربعات.

الحل: يتم أولا كتابة 4 معادلات رصد (تأخذ صورة معادلة الخط المستقيم $y = a\,x + b$ حيث a و b متغيرات الخط المستقيم:

$y_1 + v_2 = a(x_1 + v_1) + b$ or $2.2 + v_2 - a(2 + v_1) - b = 0$

$y_2 + v_4 = a(x_2 + v_3) + b$ or $2.9 + v_4 - a(3 + v_3) - b = 0$

$y_3 + v_6 = a(x_3 + v_5) + b$ or $4.2 + v_6 - a(4 + v_5) - b = 0$

$y_4 + v_8 = a(x_4 + v_7) + b$ or $5.1 + v_8 - a(5 + v_7) - b = 0$

$$A\,X + B\,V = K$$

$$A\,X = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \\ -4 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix}$$

$$B\,V = \begin{bmatrix} -a^o & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^o & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^o & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^o & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}$$

$$B\,V = \begin{bmatrix} -0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -(2.2 - 2a^0 - b^0) \\ -(2.9 - 3a^0 - b^0) \\ -(4.2 - 4a^0 - b^0) \\ -(5.1 - 5a^0 - b^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

القيم التقريبية لمتغيرات الخط المستقيم

$$a^o = 0.9$$

$$b^o = 0.3$$

$$\Delta X = (A^T (B\,B^T)^{-1} A)^{-1} (A^T (B\,B^T)^{-1} K)$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} +0.10 \\ -0.20 \end{bmatrix}$$

ΔX: متجه الحل $\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix}$ و يمثل القيم اللازمة لتحديث قيم المجاهيل الأولية x^o (أو $\begin{bmatrix} a^o \\ b^o \end{bmatrix}$) للحصول على قيمها المضبوطة X كالأتي:

و تحسب الكميات المضبوطة X للمجاهيل كالأتي:

$$X = \Delta X + X^o$$

بحيث يتم تكرار الحل عدد من المرات حتى تقترب عناصر المتجه ΔX من الصفر مع مراعاة تحديث قيم عناصر المصفوفة B و المتجه K في كل مرة باستخدام القيم المحسوبة مجددا لعناصر متجه المجاهيل X .

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$V = B^T (BB^T)^{-1} (K - AX)$$

$$V = \begin{bmatrix} +0.05 \\ -0.06 \\ -0.01 \\ +0.11 \\ +0.05 \\ -0.06 \\ +0.00 \\ -0.00 \end{bmatrix}$$

ويحسب متجه الأرصاد المضبوطة كما يلي:

$$\tilde{L} = L + V = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.2 \\ 3 \\ 2.9 \\ 4 \\ 4.2 \\ 5 \\ 5.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +0.05 \\ -0.06 \\ -0.01 \\ +0.11 \\ +0.05 \\ -0.06 \\ +0.00 \\ -0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.05 \\ 2.14 \\ 2.90 \\ 3.01 \\ 4.05 \\ 4.14 \\ 5.00 \\ 5.10 \end{bmatrix}$$

Error Ellipse

Given the variance covariance matrix $\begin{bmatrix} \sigma^2{}_{Ep} & \sigma_{Ep,Np} \\ \sigma_{Ep,Np} & \sigma^2{}_{Np} \end{bmatrix}$ of the E,N coordinates of a point P, the orientation (t) and the dimensions (σ_U, σ_V) of the related error Ellipse can be obtained as follows:

$$\text{Tan } 2t = \frac{2\sigma_{Ep,Np}}{\sigma^2{}_{Np} - \sigma^2{}_{Ep}}$$

$$\sigma^2{}_U = \sigma^2{}_{Ep} \ \text{Sin}^2(t) + 2\sigma_{Ep,Np} \text{Sin}(t) \text{Cos}(t) + \sigma^2{}_{Np} \ \text{Cos}^2(t)$$

$$\sigma^2{}_V = \sigma^2{}_{Ep} \ \text{Cos}^2(t) - 2\sigma_{Ep,Np} \text{Sin}(t) \text{Cos}(t) + \sigma^2{}_{Np} \ \text{Sin}^2(t)$$

The following example illustrates how to determine the orientation and dimensions of error ellipse.

Example

Plane rectangular coordinates of a point P are calculated using the following equations:

$$E_P = E_o + d \text{ Sin } (\alpha)$$
$$N_P = N_o + d \text{ Cos } (\alpha)$$

Given that E_o and N_o are errorless and the respective std. dev. values of the measured distance d and the measured azimuth α are ±0.02 m and ±10". d = 550.60 m and α = 44° 30' 00". Compute

a) Variance covariance matrix of E_P and N_P.
b) Orientation of the standard error ellipse of the position of point P.
c) Semi-major and semi-minor axes of the standard error ellipse of the position of point P.

بالرجوع الى قانون انتقال الأخطاء العشوائية صفحة (7) إذا كانت Y مجموعة (أو متجه) من الكميات y_i وكل منها دالة في مجموعة (أو متجه) من المتغيرات العشوائية x_i فان:

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \ \Sigma_{XX} \ J^T_{YX}$$

و بتطبيق ذلك على معادلتي المثال أعلاه:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2{}_{Ep} & \sigma_{Ep,Np} \\ \sigma_{Ep,Np} & \sigma^2{}_{Np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial d} & \frac{\partial F1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F2}{\partial d} & \frac{\partial F2}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{d} & \sigma_{d,\alpha} \\ \sigma_{d,\alpha} & \sigma^2{}_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F1}{\partial d} & \frac{\partial F2}{\partial d} \\ \frac{\partial F1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F2}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^2{}_{Ep} & \sigma_{Ep\ Np} \\ \sigma_{Np\ Ep} & \sigma^2{}_{Np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & d\ \cos\alpha \\ \cos\alpha & -d\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{d} & \sigma_{d,\alpha} \\ \sigma_{d,\alpha} & \sigma^2{}_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ d\ \cos\alpha & -d\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.701 & 392.715 \\ 0.713 & -385.921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.02)^2 & 0 \\ 0 & (\frac{10}{206265})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.701 & 0.713 \\ 392.715 & -385.921 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^2{}_{Ep} & \sigma_{Ep,Np} \\ \sigma_{Ep,Np} & \sigma^2{}_{Np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.000588 & -0.000186 \\ -0.000186 & +0.000589 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{EP} = \pm 0.024$ m.
$\sigma_{NP} = \pm 0.024$ m.
$\sigma_{EP,NP} = -0.000186$ m^2.

$$\text{Tan } 2t = \frac{2\sigma_{Ep,Np}}{\sigma^2{}_{Np} - \sigma^2{}_{Ep}}$$

$$2t = \text{Tan}^{-1} \frac{2\sigma_{Ep,Np}}{\sigma^2{}_{Np} - \sigma^2{}_{Ep}} = \text{Tan}^{-1} \frac{2(-0.000186)}{(0.000589 - 0.000588)} = 270° \ 18' \ 29''$$

$t = 135° \ 09' \ 14.5''$

$\sigma^2{}_U = \sigma^2{}_{Ep} \ \text{Sin}^2(t) + 2\sigma_{Ep,Np} \text{Sin}(t) \text{Cos}(t) + \sigma^2{}_{Np} \ \text{Cos}^2(t)$
$\sigma^2{}_U = 0.000277 + 0.000186 + 0.000284 = 0.000747$

$\sigma_U = 0.0273$ m.

$\sigma^2{}_V = \sigma^2{}_{Ep} \ \text{Cos}^2(t) - 2\sigma_{Ep,Np} \text{Sin}(t) \text{Cos}(t) + \sigma^2{}_{Np} \ \text{Sin}^2(t)$
$\sigma^2{}_V = 0.000276 - 0.000186 + 0.000280 = 0.000370$

$\sigma_V = 0.0192$ m.

χ^2Test: Goodness of Fit

At the completion of a least-squares adjustment, the significance of the computed reference variance, $\widehat{\sigma_o^2}$, can be checked statistically. This check is often referred to as a *goodness-of-fit test* since the computation of $\widehat{\sigma_o}^2$ is based on $\sum v^2$. That is, the computed reference variance gets larger with large values of residuals, and thus the model computed deviates more from the values observed.

The χ^2 distribution checks the computed (a posteriori) reference variance against the a priori reference variance through the following two-tailed test:

Null Hypothesis:

$$H_o: \widehat{\sigma_o}^2 = \sigma_o^2$$

Alternative Hypothesis:

$$H_A: \widehat{\sigma_o}^2 \neq \sigma_o^2$$

The test statistic is given by

$$\chi^2 = \frac{v\,\widehat{\sigma_o^2}}{\sigma_o^2}$$

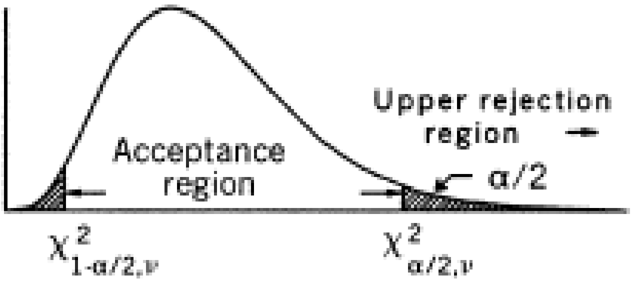
Where:

v Number of degrees of freedom

σ_o^2 A priori reference variance

$\widehat{\sigma_o^2}$ A posteriori reference variance

The null hypothesis is rejected when the value computed is either less than $\chi^2_{1-\alpha/2,v}$ or greater than $\chi^2_{\alpha/2,v}$, where α is the level of significance (confidence interval is 1-α). This means that the computed variance is outside the constructed confidence interval for the a priori variance.



The table illustrates the critical values for the χ^2 distribution

$\nu\downarrow$ \ $\alpha\rightarrow$	0.999	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	0.000002	0.000039	0.000157	0.000982	0.004	0.016	0.455	2.705	3.841	5.023	6.634	7.877	10.81
2	0.002	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.81
3	0.02	0.07	0.12	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.82	9.35	11.34	12.84	16.26
4	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.12
9	1.15	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	1.83	2.60	3.05	3.82	4.58	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	3.04	4.08	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	4.91	6.27	7.02	8.23	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	8.09	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
35	14.69	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	34.34	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
40	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
120	77.76	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62	119.33	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65	173.6

Example

Given the a priori reference variance σ_o^2 = 1, a posteriori reference variance $\widehat{\sigma_o^2}$ = 2.20 , Number of degrees of freedom υ = 13. Test the null hypothesis that $\widehat{\sigma_o}^2 = \sigma_o^2$ considering that α = 0.01.

Solution

The test statistic is given by

$$\chi^2 = \frac{\upsilon\,\widehat{\sigma_o^2}}{\sigma_o^2} = 13(2.20)/1 = 28.60$$

By looking at the table above:

Lower test value = $\chi^2_{1-\alpha/2,\upsilon} = \chi^2_{0.995,13}$ = 3.57

Upper test value = $\chi^2_{\alpha/2,\upsilon} = \chi^2_{0.005,13}$ = 29.82

Since the value of $\widehat{\sigma_o^2}$ is located between the lower and upper test values it means that the computed reference variance passes the test and the null hypothesis is accepted.

Example

Given the a priori reference variance σ_o^2 = 1, a posteriori reference variance $\widehat{\sigma_o^2}$ = 2.55 , Number of degrees of freedom υ = 12. Test the null hypothesis that $\widehat{\sigma_o}^2 = \sigma_o^2$ considering that α = 0.05.

Solution

The test statistic is given by

$$\chi^2 = \frac{\upsilon\,\widehat{\sigma_o^2}}{\sigma_o^2} = 12(2.55)/1 = 30.60$$

By looking at the table above:

Lower test value $= \chi^2_{1-\alpha/2,\upsilon} = \chi^2_{0.975,12} = 4.40$

Upper test value $= \chi^2_{\alpha/2,\upsilon} = \chi^2_{0.025,12} = 23.34$

Since the value of $\widehat{\sigma_o^2}$ is not located between the lower and upper test values it means that the computed reference variance does not pass the test and the null hypothesis is rejected.

The rejection of the null hypothesis may be due to blunders in the data or an incorrect decision in selecting the stochastic model for the adjustment.

Blunder Detection

Considering parametric least squares adjustment, this procedure is to be followed in case that the χ^2 test fails:

a) The cofactor matrix of residual errors Q_{VV} can be expressed as follows:

$Q_{VV} = P^{-1} - A\, Q_{XX}\, A^T$;

where Q_{XX} cofactor matrix of estimated unknowns

Thus;

$Q_{VV} = P^{-1} - A\,(A^T P A)^{-1} A^T$

b) Standardized residual $\overline{v_i}$ for an observation *i* can be computed as follows:

$$\overline{v_i} = \frac{v_i}{\sqrt{q_{ii}}}$$

Where:

v_i : residual error of an observation *i*

q_{ii} : *i*th diagonal term of the matrix Q_{VV}

c) The test statistic t_i for consideration of an observation *i* as a blunder can be given by:

$$t_i = \frac{\overline{v_i}}{\widehat{\sigma_o}}$$

In practice, it is reported that 3.29 works as a criterion for rejection of blunders. This means that an observation i is rejected when its t_i is larger than 3.29.

d) In order to identify and get rid of blunders (outliers) from the observations, the following steps can be applied:

1. Locate standardized residuals where $\frac{\bar{v}_i}{\widehat{\sigma_o}} > 3.29$.
2. Remove the largest detected blunder.
3. Rerun the adjustment process.
4. If the χ^2 test fails, continue steps 1 – 3 until detected blunders are removed.
5. If more than one observation is removed in steps 1 – 4, perform the adjustment process again using the unremoved observations with each removed observation at a time. This is to check the observation to see if it is again detected as a blunder. If it is, it has to be removed or reobserved.